11 YEREL KOMPAKT UZAYLAR

Bazen, bazı özellikler bütün uzayda değilde, yerel olarak sağlanabilir. Örneğin, ikinci sayılabilir olmayan birinci sayılabilir uzaya, yerel ikinci sayılabilir uzay diyebiliriz. Buna benzer olarak, bir uzay kompakt olmayabilir, fakat her noktada uygun kompakt kümeler ailesine sahip olabilir.

Örnek: $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ kompakt değildir. Fakat, keyfi $x \in \mathbb{R}$ ve x'in keyfi U_x komşuluğu için $\exists \varepsilon > 0$ sayısı vardır ki $B_\varepsilon(x) \subset U_x$ dir.

$$B_{\varepsilon/2}(x) \subset \overline{B_{\varepsilon/2}(x)} \subset B_\varepsilon(x) \subset U_x .$$

Herhangibir x ve x'in herhangibir U_x komşuluğu için bir $A = \overline{B_{\varepsilon/2}(x)}$ kompakt kümesi vardır ki $x \in \mathring{A} \subset A \subset U_x$ dir.

Tanım: $(X, \mathcal{Z})$ topolojik uzayında, keyfi x ve x'in keyfi U_x komşuluğu için $x \in \mathring{A} \subset A \subset U_x$ olacak şekilde bir A kompakt kümesi varsa, bu topolojik uzaya <u>yerel kompakt uzay</u> denir.

Örnekler: 1) $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$, yerel kompakt uzaydır.

2) Her $(X, \mathcal{Z})$ diskrit topolojik uzayı yerel kompaktır. Her x için A kümesini $\{x\}$ almak yeterlidir.

3) Sorgenfrey doğrusunun her kompakt alt kümesi sayılabilir sayıdadır. (Gösteriniz) Dolayısıyla, içi boş kümedir. Bundan dolayı, kompakt kapanışa sahip açık küme olmadığından Sorgenfrey doğrusu yerel kompakt değildir.

Teorem: $(X, \mathcal{Z})$ Hausdorff uzay olsun. X'in yerel kompakt olması için gerek ve yeter şart verilen her $x \in X$ için $x \in \mathring{A}$ olacak şekilde bir A kompakt kümesinin olmasıdır.

Kanıt: X yerel kompakt ve $x \in X$ olsun. X, x'in bir komşuluğu olduğundan $x \in \mathring{A} \subset A \subset X$ olacak şekilde bir A kompakt kümesi vardır.

Tersine, verilen $x \in X$ için $x \in \mathring{A}$ olacak şekilde bir A kompakt kümesi olsun. x'in herhangibir komşuluğu U_x olsun. $\mathring{A} \cap U_x$, x'in bir komşuluğu ve U_x'in bir alt kümesidir. Genelliği bozmadığı için, U_x'i $\mathring{A}$'ın bir alt kümesi olarak düşünebiliriz. A kompakt ve Hausdorff olduğundan düzenli uzaydır. Ayrıca, $U_x \cap A = U_x$ ($U_x \subset \mathring{A} \subset A$ olduğu için),

A'da A'nın boş olmayan açık bir altkümesidir. Bu yüzden, hem A'da hem de X'de $x \in V \subset \overline{V}$ (A'da) $\subset U_x \subset \mathring{A}$ olacak şekilde V açık kümesi vardır. A, Hausdorff uzayın bir kompakt altkümesi olduğu için kapalıdır, bu yüzden $\overline{V}$ (X'de) $= \overline{V}$ (A'da) dır. $\overline{V}$, bir kompakt Hausdorff uzayın kapalı alt kümesi olduğundan kompaktır. Buna göre, $x \in V = \mathring{V} \subset \overline{V} \subset U_x$ ve $\overline{V}$ kompaktır. Yani, X yerel kompakt uzaydır. ■

Sonuç: Hausdorff kompakt uzay, yerel kompaktır.

Kanıt: X, herhangibir $x \in X$ noktasının kompakt komşuluğudur. ■

Örnek: $(\mathbb{R}, \tau_z)$ Zariski topolojik uzayı T_1-uzay ama Hausdorff değildir. Fakat, her $x \in \mathbb{R}$ ve x'in herhangi U_x komşuluğu için U_x kompakt olduğundan $x \in U_x = \mathring{U}_x \subset U_x$ şartı sağlanır. Dolayısıyla uzay, yerel kompaktır.

Teorem: Hausdorff, yerel kompakt uzay, düzenli uzaydır.

Kanıt: $x \in X$ ve U_x, x'in herhangibir komşuluğu ise $x \in \mathring{A} \subset A \subset U_x$ olacak şekilde bir A kompakt kümesi vardır. A kompakt olduğundan kapalıdır ve $\overline{\mathring{A}} \subset A$ dır. $V = \mathring{A}$ alırsak, x'in bir komşuluğu olarak V, $x \in V \subset \overline{V} \subset U_x$ şartını sağlar. Yani, X düzenlidir. ■

Teorem: Hausdorff, yerel kompakt uzayın her kapalı veya açık altuzayı da yerel kompaktır.

Kanıt: U, X'in açık bir alt uzayı ve $x \in U$ olsun. x'in U'daki herhangi V komşuluğu X'de de x'in bir komşuluğudur. Bu yüzden, $x \in \mathring{A} \subset A \subset V \subset U$ olacak şekilde bir A kompakt kümesi vardır. Dolayısıyla, U yerel kompaktır. (Açık altuzay kısmını kanıtlarken X'in Hausdorff uzay olmasına gerek yoktur.)

F, X'in kapalı altuzayı ve $x \in F$ olsun. A, $x \in \mathring{A} \subset A$ olacak şekilde bir kompakt küme olsun. X Hausdorff olduğundan, A kapalıdır. $F \cap A$, A kompakt kümesinde kapalı altküme olduğundan kompaktır. $F \cap A \subset F$ olduğundan $x \in \overset{\circ}{\overline{A \cap F}} \subset A \cap F \subset F$ dir. F Hausdorff olduğundan, iki önceki teoremden F yerel kompaktır. ■

Örnek: $(\mathbb{R}, \tau)'$nun altuzayı $(\mathbb{Q}, \tau_{\mathbb{Q}})$ yerel kompakt uzay değildir. Herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ için $K = \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leq x \leq b\}$ kümesi $\mathbb{Q}'$da kompakt olmalı. K, $\mathbb{R}'$de kompakt dolayısıyla kapalı olmalı, fakat $\overline{K} = [a,b] \neq K$ olduğundan, K, $\mathbb{Q}'$da kompakt değildir. $(\mathbb{Q}, \tau_{\mathbb{Q}})$ yerel kompakt değildir.

$(\mathbb{Z}, \tau_{\mathbb{Z}})$ altuzayı ise $\tau_{\mathbb{Z}} = 2^{\mathbb{Z}}$ olduğundan, yerel kompaktır.

Teorem: Hausdorff yerel kompakt uzayın bir alt kümesinin yerel kompakt uzay olması için gerek ve yeter şart altkümenin bir açık ve bir kapalı kümenin kesişimi olmasıdır.

Kanıt: Çalışma sorusu. ■

Teorem: Hausdorff, yerel kompakt uzay, tamamen düzenlidir.

Kanıt: Çalışma sorusu. ■

Teorem: f, (X, τ_X) yerel kompakt uzayından (Y, τ_Y) topolojik uzayına giden sürekli, açık ve üzerine bir fonksiyon ise (Y, τ_Y)'de yerel kompakttır.

Kanıt: $y \in Y$ ve U_y, y'nin bir komşuluğu olsun. Y'de $y \in \mathring{A} \subset A \subset U_y$ şartını sağlayan bir A kompakt kümesi bulmalıyız. f üzerine olduğundan $\exists x \in X$ vardır ki $y = f(x)$ dir. Süreklilikten $f(V) \subset U_y$ olacak şekilde x'in bir V komşuluğu vardır. X yerel kompakt olduğundan $x \in \mathring{B} \subset B \subset V$ şartını sağlayan bir B kompakt kümesi vardır. Buna göre $f(x) = y \in f(\mathring{B}) \subset f(B) \subset f(V) \subset U_y$ dir. f, açık fonksiyon olduğundan $f(\mathring{B})$ açık, B kompakt ve f sürekli olduğundan da $f(B)$ kompakttır. Yani, Y yerel kompakt uzaydır. ■

Sonuç: Yerel kompaktlık, bir topolojik özelliktir.

Teorem: a) $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ çarpım uzayının yerel kompakt olması için gerek ve yeter şart her X_i'nin yerel kompakt ve sonlu tane hariç hepsinin kompakt olmasıdır.
b) $\prod_{i=1}^{n} X_i$ çarpım uzayının yerel kompakt olması için gerek ve yeter şart her X_i'nin yerel kompakt olmasıdır.

Kanıt: Çalışma sorusu. ■

X yerel kompakt uzay ise içi boş olmayan kompakt alt uzaylar ailesinin birleşimi X'i verir. Bu aile, sayılabilir sayıda ise bu uzaya <u>σ-yerel kompakt uzay</u> denir. Sayılabilir kompakt altkümelerin birleşimi X ise bu uzaya <u>σ-kompakt</u> denir. Yani, σ-yerel kompakt uzay, hem yerel kompakt, hem de σ-kompakt uzaydır. σ-kompakt uzay, Lindelöf uzaydır.

$(\mathbb{R}, \tau)$, hem σ-yerel kompakt uzay, hem de σ-kompakttır.

Bu konunun devamı olarak, <u>kompaktlaştırma</u> konusu ödev olarak bırakılmıştır.